

АРИФМЕТИКА — МАТЕМАТИКА

Классы с 1-го по 5-й — 12 недель в каждом

Классы с 6-го по 8-й — 10 недель в каждом — на главном уроке

Классы с 9-го по 12-й — 8 недель в каждом

Кроме того, начиная с 6-го класса еженедельно 1 час в рамках главного урока — на повторение и упражнения. Это делается лишь тогда, когда на главном уроке проходят не математику, а какую-то другую дисциплину.

В 1-й лекции *Методико-дидактического курса* Рудольф Штейнер определил место арифметики и математики в программе вальдорфской школы и разработал введение в четыре арифметических действия. Несколько подробнее эти указания представлены в материалах 4-го семинара. В обоих случаях он ссылается на свою теорию познания (см. «*Очерк теории познания Гетеевского мировоззрения*», глава «Рассудок и разум», в конце). Для него было важно, чтобы учитель начальных классов, будучи философски подготовленным, подводил детей к понятию сложения, отталкиваясь от суммы, и соответствующим образом поступал в отношении других арифметических действий. Штейнер желал, чтобы с самого начала было осознано значение этого исходного момента математического мышления для правильного вхождения ребенка в мир. Это не означает, что нужно преподавать ребенку теорию познания, но указывает на то, что нельзя недооценивать значение занятий арифметикой, а также напоминает о долге перед духом, который принимает на себя учитель, приступив к воспитанию. По причине чрезвычайной важности этих указаний я целиком привожу соответствующее место из философского сочинения Штейнера:

«Кант полагает, что формулы математики и чистого естествознания суть такие значимые синтетические суждения a priori. Он приводит, например, положение: $7 + 5 = 12$. В 7 и 5 отнюдь не содержится сумма 12, так заключает Кант. Я должен выйти за пределы 7 и 5 и обратиться к моему созерцанию, тогда я найду понятие 12. Мое созерцание требует, чтобы $7 + 5$ представлялось равным 12. Предметы моего опыта должны, однако, доходить до меня через посредство моего созерцания и, таким образом, подчи-

няться его законам. Чтобы опыт был возможен, такие положения должны быть верными.

Пред объективным размышлением все это искусственное мысленное здание Канта не может устоять. Нельзя допустить, чтобы в понятии подлежащего не было никакой точки опоры, приводящей меня к понятию сказуемого. Ибо оба понятия добыты моим рассудком и притом на вещи самой по себе целостной. Не надо обманываться. Математическая единица, лежащая в основе числа, не есть первичное. Первично есть величина, которая есть столько-то кратное повторение единицы. Я должен предполагать величину, говоря об единице. Единица есть создание нашего рассудка, которое он отделяет от целого, подобно тому как он отделяет действие от причины, субстанцию от ее признаков и т. п. Когда я мыслю $7 + 5$, я, в действительности, держу в мыслях 12 математических единиц, но только не сразу, а в двух частях. Если я сразу представляю себе всю совокупность этих математических единиц, то это совсем то же самое. И это тождество я выражаю в суждении $7 + 5 = 12$. *Очерк теории познания Гетеевского мировоззрения...*, М.: «Парсифаль», 1993, стр. 53–54.

Вот что должен нести в себе учитель, когда, занимаясь с ребенком арифметикой, он выводит сложение из понятия суммы. Ведь ему известно, что понятие суммы становится у детей переживанием, когда конкретное число он разделяет на различные группы слагаемых. С подробностями читатель может ознакомиться в указанных местах, где они всякий раз включены в более широкий контекст. Однако следует учитывать наличие искажений (в особенности это касается семинара), возникших вследствие оговорок и ошибок стенографов. Поэтому в конце раздела о первом учебном году будет дана попытка **интерпретации**.

Прежде всего будут представлены высказывания Рудольфа Штейнера, дающие ключ к преподаванию математики в целом.

В *Лекциях по школьной педагогике от 1919 года* имеется место, которое непосредственно вводит нас в проблемы преподавания математики:

«Я неоднократно говорил, что, если только взять правильный возраст, — можно будет в течение 3 или 4 уроков провести молодых людей от начал геометрии, от прямой линии и угла до теоремы

Пифагора. Если бы вы видели, как радовались дети, когда в результате моих стараний, через 3-4 урока им открывалась теорема Пифагора! И подумать только, какой чепухой набивает головы учащихся теперешнее преподавание прежде, чем привести их к этой теореме! Я говорю о том, что мы впustую растрачиваем громадный духовный труд, а это оказывается на жизни в целом. Последствия распространяются на всю жизнь». *Школьная педагогика, 1-я лекция, Заключение*

Такое заявление можно счесть несколько рискованным. Однако можно также почувствовать в себе желание со всей тщательностью проверить, что же из элементарной геометрии нам необходимо, чтобы прийти к теореме Пифагора. Тогда в приведенных словах из Лекций по школьной педагогике заложено начало полной перестройки геометрии.

С совершенно иной стороны освещается преподавание геометрии в *б-й лекции Базельского курса для учителей 1920 года*. В ней говорится, как привести ребенка к тому, чтобы конкретное пространство он переживал всем своим телом.

«У нас, в вальдорфской школе, учитель не должен удовлетворяться тем, что дети в состоянии начертить круг, наших детей следует научить чувствовать круг, треугольник, квадрат. Они должны научиться чертить треугольник, переживая три угла. Так, чтобы, намечая первый угол, они уже чувствовали: здесь будет три угла. Также и квадрат они должны рисовать, чувствуя становление углов, чтобы с самого начала они прочувствовали линию. Ребенок должен у нас научиться тому, что такое дуга, что такое горизонталь, что такое вертикальный прямой угол; не просто знать, как они выглядят, но из внутреннего чувства проводить их всею рукой, кистью. На основании этого должно проходить и обучение письму. Ребенок не должен учиться писать букву Р, не проходя предварительно через переживание вертикальной линии и дуги. Мы стремимся сообщить ему не внешнее умозрительное представление о вертикальной линии и дуге, но развить у него опирающиеся на чувство созерцание, переживание». *Базель, 1920, б-я лекция*

Введению в арифметику в том же Базельском курсе 1920 года

Рудольф Штейнер предпосыпает чрезвычайно важную точку зрения, которой должны предваряться все указания по арифметике:

«В душе постоянно живет стремление перейти от целого к множеству. Именно оттого, что с этим так мало считаются, так скучны наши достижения в понимании того, что такая душевная свобода. Если бы душевная деятельность сводилась исключительно к синтезу (лучше сказать: если бы человек находился с внешним миром в таком отношении, что он был бы в состоянии осуществлять исключительно синтез, то есть образовывать лишь видовые и родовые понятия) и если бы сама жизнь была устроена таким образом, что человек стремился бы лишь к тому, чтобы разделить ее по понятиям, и это было бы единственным видом человеческой деятельности, — тогда человек вряд ли бы мог говорить о свободе. Ведь то, что мы тогда совершили бы, как правило, предписано внешней природой. **Напротив, в основании наших поступков лежит аналитическая деятельность**, и именно аналитическая деятельность позволяет нам обрести свободу в области жизни чистых представлений». *Базель, 1920, 10-я лекция*

В том же Базельском курсе от 1920 года Рудольф Штейнер рассматривает вопрос о том, как застывшая геометрия может быть преобразована в живую:

«Тот, кто приобрел самостоятельный опыт в области геометрии, действительно может почувствовать, как из сферы покоющегося она стремится перейти в сферу живого. Говоря: «Сумма углов треугольника равна 180° », мысылаемся на общеизвестный факт. Не правда ли, так обстоит дело со всяkim треугольником? Однако в состоянии ли мы представить себе всякий треугольник? А ведь было бы хорошо, если бы мы донесли до наших детей подвижное, а не мертвое понятие треугольника, то есть не предлагали бы им рисовать всегда какой-нибудь конкретный, определенный треугольник. Мы могли бы сказать детям: «Вот прямая линия» — и затем показать им, как угол в 180° делится на три части. Я могу разделить этот угол на три части бесконечным числом способов. И всякий раз, когда деление произведено, я могу показать ребенку, как из этого деления возникает новый треугольник. Из трех развернутых веером углов я всякий раз могу образовать треугольники. Я могу их представить себе подвижными, и, разумеется, сумма

углов каждого из них будет составлять 180° . Хорошо, если у ребенка сложится представление о подвижном в себе самом треугольнике, если у него вообще не возникнет представления о покоящемся треугольнике, а только о движущемся, который может быть остроугольным, тупоугольным или прямоугольным. Только подумайте, насколько ясным может стать все учение о треугольнике, если при развитии представления о треугольности мы будем исходить из подвижности. Это могло бы послужить нам прекрасным подспорьем для развития у ребенка конкретного восприятия пространства. Если мы подобным образом развили понятие движения на материале плоскостных фигур, то вся духовная конфигурация ребенка приобретет такую подвижность, что можно будет легко перейти к элементу перспективы: одно тело проходит впереди другого или позади него. Это прохождение — впереди или сзади — может стать первым элементом пробуждения соответствующего чувства пространства». *Базель, 1920, 13-я лекция*

Ранее Рудольф Штейнер обсуждает подвижные игры в связи с чувством пространства:

«Всмотримся в детские рисунки. Тем, что можно назвать верным чувством пространства, дети 7, 8, даже 9 лет еще не обладают. Они приходят к нему позднее, когда в развитии ребенка постепенно дает о себе знать иная сила. До 7-го года над организацией ребенка работает то, что впоследствии станет способностью представления. Вплоть до наступления половой зрелости над организацией ребенка работает воля, которая впоследствии, как я уже говорил, накапливается и, прорываясь в тело, проявляется в ломке голоса у мальчиков. Эта воля служит развитию чувства пространства. При помощи всего того, о чем я говорил: развития ощущения пространства в **подвижных играх**, наблюдения за образованием теневых фигур, вообще через все, что возникает в движении и затем фиксируется — и таким образом воля получает дополнительный импульс к развитию, — через все это человек куда более основательно постигнет вещи, нежели с помощью рассудка». *Базель, 1920, 13-я лекция*

Приведем здесь еще одно место из небольшого *Штутгартского курса 1922 года*:

«После 14-15-го года мы должны пользоваться каждой возможностью установить связь с тем, что ранее было дано в преимущественно образной форме. Возьмем, например, математику. Мы стремимся в тригонометрии к пониманию теоремы косинусов. Было бы весьма полезно использовать любую возможность для того, чтобы во всех подробностях проследить с детьми связь между теоремой косинусов и обычной теоремой Пифагора и стимулировать формирование у них суждения о метаморфозе теоремы Пифагора в теорему косинусов. Это возвращение к тому, что было ранее заложено в ребенка в образной форме, может осуществляться в математике так же успешно, как и в преподавании религии и вообще во всех прочих областях. Разумеется, мы можем постоянно обращаться к тому, что было ранее заложено в образной форме. Такое обращение к прошлому стимулирует суждения». *Штутгарт, 1922, 1-я лекция*

Важные указания касательно введения в преподавание арифметики содержатся в *Оксфордском курсе 1922 года*:

«Уже в очень раннем возрасте ребенок может простейшим образом считать. И именно на примере счета можно видеть, что слишком велика легкость, с которой в ребенка внедряется интеллектуализм. Счет как таковой не чужд никакому возрасту. Он развивается из самой человеческой натуры, и человеческим способностям счетные операции не столь чужеродны, как чужеродны буквы. Однако именно поэтому чрезвычайно важно, чтобы **учение счету** велось **надлежащим образом**. Вообще говоря, верно судить об этом может только тот, кто в состоянии наблюдать всю человеческую жизнь под определенным спиритуальным углом зрения. Преподавание счета и моральные принципы — две области, которые, с логической точки зрения, далеко отстоят друг от друга. Как правило, никто не возводит преподавание счета к моральным принципам, потому что поначалу здесь не обнаруживается никакой логической связи. Однако для того, кто смотрит на дело не с чисто логической точки зрения, но с точки зрения жизни во всей ее полноте, дело обстоит так, что ребенок, который был обучен счету надлежащим образом, впоследствии приобретает совершенно иное чувство ответственности, нежели тот, который был обучен неверно. Быть может, вам это покажется до крайности парадоксальным, однако сейчас я говорю о том, как дело обстоит

в действительности, а не о том, что воображает себе наша эпоха. Поскольку в наше время истина зачастую предстает в парадоксальном обличье, пусть мне будет позволено не убегать в панике перед лицом таких парадоксов. Если бы все люди за прошедшие десятилетия научились надлежащим образом погружать душу в преподавание счета, у нас сегодня в Восточной Европе не существовало бы большевизма». *Оксфорд, 1922, 5-я лекция*

Здесь мы опускаем краткое изложение обоснования чисел как частей целого и введения понятия суммы через разложение на части.

«Благодаря этому мы можем так сориентировать ребенка в жизни, что он будет стремиться охватить целое, а не переходить непрестанно от меньшего к большему. А это оказывает чрезвычайно благотворное воздействие на всю душевную жизнь ребенка. Если ребенок привык прибавлять, в нем разовьется такая моральная предрасположенность, которая нацеливает его преимущественно на собственные желания. Когда же выполняется переход от целого к частям, когда соответствующим образом происходит обучение умножению, в ребенке формируется склонность не к алчности, а к тому, что в смысле платоновского миросозерцания, в благороднейшем смысле может быть названо рассудительностью, умеренностью. И то, что кажется кому-то в моральном смысле приемлемым или неприемлемым, находится в глубокой внутренней зависимости от того, как он был научен обходиться с числами. Между обращением с числами и моральными идеями и импульсами на первый взгляд не существует никакой логической связи, так что человек, желающий мыслить интеллектуально, может на этот счет и поехидничать. Это может ему показаться смешным». *Оксфорд, 1922, 5-я лекция*

Год спустя в *Дорнахском курсе 1923 года* Рудольф Штейнер вновь говорил о чувстве пространства:

«В нашу абстрактно-интеллектуальную эпоху люди представляют себе три пространственных измерения как бы плавающими в воздухе. Есть будто бы три таких направленных под прямым углом друг к другу линии, уходящие в бесконечность. Разумеется, путем построения абстракций постепенно такая картина может быть

получена, но пережить в чувстве ее нельзя. И все же трехмерность доступна переживанию, и переживается она в большей степени в области бессознательного, когда ребенок учится переходить от того неловкого положения, в котором он ползает, постоянно теряя равновесие, к прямостоящему и приходит к равновесному состоянию с окружающим его миром. В этом заключается конкретная трехмерность. Тут мы не можем прочертить три пространственные линии, однако здесь имеется линия, совпадающая с вертикальной осью тела, и мы ее ощущаем, когда спим или лежим и не в состоянии подняться; кроме того, линия эта является важнейшей особенностью, отличающей нас от животных, линия спинного мозга у которых параллельна земле, в то время как у нас она вертикальна. Второе измерение мы бессознательно получаем, вытягивая руки в стороны. Третье направлено спереди назад... То, что изображается в геометрических фигурах, человек переживает на себе, но происходит это лишь в том возрасте, который богат бессознательным, наполовину сновидческим. Позже это воспринимается уже как абстракция.

С сменой зубов укрепляется то, что дает человеку внутреннюю опору. С того момента в жизни, когда ребенок выпрямляется, и до того, когда в нем происходит внутреннее отвердение, которое сказывается в смене зубов, ребенок бессознательно, своим собственным телом осваивает геометрию. Затем, вместе со сменой зубов это происходит в душе. С одной стороны, физиологически нечто отвердевает. Укрепившаяся костная система подобна осадку, который образуется в охлаждающем растворе, при этом остальная часть раствора становится светлее. И с другой стороны, душевное обособляется и воплощается в геометрии». *Дорнах, 1923, 1-я лекция*

Указание **насчет времени начала преподавания арифметики** содержится в *10-й лекции Методико-дидактического курса*. Оно следует непосредственно за замечанием о том, что художественное преподавание, положенное в основу преподавания письма и чтения, должно начинать работу в школе:

«Так что, как видите, к **арифметике** придется приступать несколько позже, после других неотложных дел; ведь в жизни человека нет точно соответствующего ему момента». *Метод.-дидакт., 1-я лекция*

Первый класс:

В лекциях по учебному плану 1919 года задача 1-го класса нечетко отделена от задачи 2-го класса. Однако в 4-м семинарском занятии есть место, которое — также и по причине своей общей значимости — должно быть приведено здесь, вначале. Оно может помочь правильно разделить задачи обоих классов:

«Важно, чтобы работа не наскучивала: например, не следует заниматься в течение года одним только сложением и т.д. Напротив, нам следует довольно быстро пройти четыре арифметических действия, после чего перейти к упражнениям. Сначала примерно в пределах 40. Таким образом, мы будем учиться арифметике не по обычному почасовому плану, а заниматься всеми четырьмя действиями одновременно и позаботимся о том, чтобы посредством упражнений они были усвоены почти одновременно. Как вы сами убедитесь, все это может быть пройдено весьма экономным образом». *Семинар, 4-е обсуждение*

Далее следуют указания из *2-й лекции по учебному плану*:

Еще о первом классе:

«Внешняя методика предписывает заниматься в 1-м классе числами вплоть до 100. Можно держаться этого принципа, поскольку с натуральными числами в значительной степени безразлично, насколько далеко будет осуществляться продвижение по числовому ряду. Самое главное — заниматься арифметическими действиями с учетом сказанного мною раньше, независимо от того, насколько далеко вы продвинулись по числовому ряду. Сложение должно выводиться из суммы, вычитание — из разности, умножение — из произведения, а деление — из частного. То есть в обратном порядке — если сравнить с тем, как это делается обычно. Только после того, как показано, что $5 = 3 + 2$, можно показать и обратное: через сложение 2 и 3 возникает 5. У ребенка должно быть яркое представление о том, что 5 равно 3 плюс 2, и что 5 также равно 4 плюс 1 и т.д. — то есть сложение является чем-то вторичным в отношении раздробления суммы. А вычитание возникает после вопроса: что должен я вычесть из уменьшаемого, чтобы получился определенный остаток. Само

собой разумеется, что в 1-м классе это производится с небольшими числами. А вот продвигаться ли при этом по числовому ряду до 100, до 105 или до 95 — по правде говоря, вопрос второстепенный. Затем, когда зубы у ребенка сменились, именно в это время, — ему следует заучить таблицу умножения и, пожалуй, таблицу сложения, по крайней мере до 6 или до 7. Итак, **как можно раньше выучить** таблицу умножения и **таблицу сложения на память** — сразу после того, как ребенку объяснили, что это такое, на простых примерах умножения, обращаться с которыми следует так, как было указано. **Как только мы будем в состоянии довести до ребенка понятие умножения**, на него должна быть возложена обязанность выучить таблицу умножения». *Учебный план, 2-я лекция*

Это место, очевидно, следует относить к 1-му классу, на который, таким образом, приходится изучение четырех арифметических действий и таблицы умножения. Продолжение данной лекции по учебному плану, очевидно, относится ко 2-му классу:

По 2-му классу:

«Далее арифметические действия вводятся на более широком числовом пространстве. Следует выполнять простые задания, в уме, без записи». *Учебный план, 2-я лекция*

Однако **к первому классу**, очевидно, относится также и то, что здесь не упомянуто — счет как таковой. В отношении его мы читаем в *Дорнахском рождественском курсе для учителей в 1921/22 году* следующее:

«Ребенок готов заниматься арифметикой без всяких дополнительных условий, когда он достигает школьного возраста. Речь может идти только о том, чтобы при этом учитывались внутренние потребности его природы. Ребенок имеет предрасположенность к ритму, такту, к восприятию всего гармонизирующего. Разумеется, ребенок должен научиться считать. С развитием цивилизации мы пришли к тому, что работа с числами приобрела синтетический характер: у нас имеется одно, другое, третье, и, считая, мы прибавляем слагаемые друг к другу так, чтобы при подсчете одно оказалось лежащим подле другого. Однако, как в этом можно убедиться, здесь мы не встретим внутреннего понимания со

стороны ребенка. Да и вообще, человечество приходило к счету не таким образом. Счет исходил из целого. Двойка не является внешним повторением целого, но содержится в нем. Одно порождает два, и два содержатся в одном. При делении из одного возникает три, и три содержатся внутри одного. Когда человек записывал: «один», он не выходил из пределов целого, и, когда он переходил к двум, два оставались внутри целого, как и три и т.д. Все охватывалось целым, и числа были его органическими частями». *Дорнах, 1921/22, 9-я лекция*

Далее речь идет о том, как посредством элементарного деления получаются **числа**. Здесь имеются некоторые отклонения от пути, намеченного в Штутгарте, и это показывает, насколько большой простор для учителя предоставляют указанные Рудольфом Штейнером методы.

О рисовании, как подготовительной ступени для геометрии, можно справиться в материалах по 4-му классу.

Теперь дадим **интерпретирующее обобщение занятий арифметики в 1-м классе**:

Посредством разделения любого наглядно наблюдаемого целого на две, три, четыре или большее количество частей учитель подводит детей к первому постижению сущности числа, после чего им предлагают считать на пальцах. Затем вводятся все четыре арифметических действия (по возможности одновременно), причем поначалу нужно упражняться на ограниченном числовом пространстве. Взяв реальное множество каких угодно вещей — **сумму**, мы делим его на столь же реальные меньшие множества, **слагаемые**.

Мы исходим из реального предметного множества в качестве **уменьшаемого** и такого же предметного **остатка**, получившегося вследствие изъятия некоей части. Вопрос о том, что нужно было взять, чтобы остаток был именно таким, приводит ребенка к тому, что он постигает **вычитаемое** и через него — **вычитание**.

Мы исходим из реального **множимого** и из столь же реального **произведения**, после чего предлагаем ребенку найти определяемый чистым числом **множитель**. Таким образом ребенок знакомится с **умножением**.

Мы исходим из реального предметного множества, которое предстоит **разделить — делимого**, и из столь же реальной его части — **частного**; ребенку предлагается найти число частей — **делитель**.

Мы исходим из реального множества, которое предстоит **измерить, — делимого**, и из заданного числа мер — **частного**; ребенку предлагается найти **меру**. Ребенку дается возможность познать **деление** в двух его формах — **деление на части и измерение**.

После построенных таким образом начальных упражнений, в которых нам следует исходить из имеющегося в наличии, осозаемого, а умопостигаемое поручать отыскивать детям, мы переходим к обычным арифметическим действиям с числами.

Дадим еще следующую сводку, чтобы учитель имел возможность полностью все обозреть:

1) **Сложение**: сумма = первое слагаемое + *прибавляемое*.

Сколько (прибавляемое) следует прибавить к **первому слагаемому**, чтобы получилась именно такая **сумма**?

2) **Вычитание**: разница = уменьшаемое — *вычитаемое*.

Сколько (вычитаемое) следует забрать у **уменьшаемого**, чтобы получился именно такой **остаток**?

3) **Умножение**: произведение = множимое × *множитель*

Сколько раз (множитель) следует повторить данное **множимое**, чтобы получилось именно такое **произведение**?

4) **Деление**:

a) **Деление на части**: часть = делимое : *число частей*

На сколько (делитель) частей следует разделить данное **делимое**, чтобы получить именно такую **величину части**?

b) **Измерение**: число мер = делимое : *величина части*

Какой мерой следует измерять (обмерять, сравнивать) данное **делимое**, чтобы получить именно такое **число мер**?

По теме введения в арифметику смотри также: *Дорнах, 1921/22, 9-я лекция*, далее — *Илкли 1923, 10-я лекция* и в особенности *Торки, 1924, 5-я лекция*.

Второй класс:

В *Лекциях по учебному плану* непосредственно вслед за приведенными указаниями, относящимися к 1-му классу, говорится:

«Далее арифметические действия вводятся на более широком числовом пространстве. Следует выполнять простые задания в уме, без записи. Сначала непосредственно на предметах вводятся неименуемые числа. Я уже показал вам, как вы на бобах или на чем-нибудь другом можете ввести неименуемые числа. Однако не следует упускать из виду и арифметические действия с величинами». *Учебный план, 2-я лекция*

Что касается рисования и **геометрии**, о них можно справиться в материалах, приводимых нами по 4-му классу. Там в подробностях показано, что во 2-м и 3-м классах следует заниматься развитием пространственного созерцания, например воспитывать чувство симметрии и подобия.

Третий класс:

В *Лекциях по учебному плану* мы читаем:

«В 3-м классе со все увеличивающимися числами продолжается работа (уже в приложении к некоторым простым вещам из повседневной жизни) с четырьмя арифметическими действиями». *Учебный план, 2-я лекция*

Сравните также: *Торки, 1924, 7-я лекция*.

«Вошло в обыкновение начинать в 3-м классе **письменные вычисления**; сравните с тем, что указано в отношении 2-го класса. В отношении **рисования** и **геометрии** можно справиться в материалах, приводимых нами по 4-му классу». — Сравните также: *Торки, 1924, 7-я лекция*.

Четвертый класс:

«В 4-м классе продолжается то, чем занимались в первых трех классах. Однако теперь нам следует **переходить к дробям**, а именно

к десятичным дробям. *Учебный план, 2-я лекция*

В отношении введения десятичных дробей следует особо посмотреть *14-ю лекцию* педагогического курса в *Базеле*.

Что касается геометрии, то с ней имеется одно затруднение: в *10-й лекции Методико-дидактического курса* ясно говорится о ее связи с этапом жизни между 9-м и 12-м годами:

«В этом возрасте мы можем переходить к геометрии, если то, что должно развиться в геометрию, ребенок уже воспринял в себя благодаря рисованию. В форме рисунка мы можем дать детям треугольник, квадрат, круг и линию. Мы вводим геометрические формы, когда рисуем, и затем говорим: «Это треугольник, это квадрат». Однако собственно геометрию, когда мы отыскиваем связи между формами, мы начинаем давать около 9-го года жизни».

В конце только что цитированной *10-й лекции Методико-дидактического курса* говорится:

«Геометрия предоставляет вам чрезвычайно благоприятную возможность связать наглядное преподавание с учебным материалом самой геометрии».

После этого дано построенное всецело на принципах наглядности доказательство теоремы Пифагора; сформулированное для особого случая **равнобедренного прямоугольного треугольника**, оно, однако, может быть расширено и сделано применимым к любому прямоугольному треугольнику. В связи с этим Штейнер сказал тогда:

«Вы можете вести геометрию в форме наглядного преподавания. Весьма важно (я уже испробовал это), преподавая теорему Пифагора, стараться сделать ее наглядной для ребенка после 9 лет. Выводите теорему Пифагора непосредственно из фрагментов квадрата, построенного на гипотенузе. Самое большее за 7-8 часов вы можете сообщить ребенку все, что необходимо по геометрии, чтобы обратиться к теореме Пифагора, известным «пифагоровым штанам». Если первые основы геометрии вводить таким наглядным образом, это будет чрезвычайно экономным способом достижения

целей. Вы сбережете много времени. Кроме того, вы сбережете в ребенке нечто чрезвычайно важное, отсутствие чего разрушительно действует на преподавание. Не нужно разъяснять ребенку абстрактный ход мысли для того, чтобы он мог понять теорему Пифагора, давайте ему конкретные мысли, переходя от простого к сложному». *Метод.-дидакт., 10-я лекция*

О теореме Пифагора смотрите также: *Общее учение о человеке, 14-я лекция*

Еще в *Лекциях по учебному плану* в отношении 6-го класса говорится следующее:

«Итак, до 6-го класса мы получали геометрические формы — круг, треугольник, — занимаясь рисованием **сначала в целях обучения письму**. Затем мы постепенно перешли к более сложным формам, которыми мы занимались уже **ради них самих**, ради рисования, а также на занятиях **живописью**. Преподавая рисование и живопись в 4-м классе, мы учим тому, что такое круг, эллипс и т.д. И продолжаем дальше, переходя к пластическим формам, пользуясь пластилином, когда его можно достать. Когда его нет, можно воспользоваться чем угодно, даже грязью с улицы, ничего страшного, если мы задались целью привести детей к созерцанию форм, к чувству формы. То, чему таким образом дети научились в искусстве, перенимают теперь математика, **геометрия**. Мы переходим к тому, чтобы **геометрически** объяснить детям, что такое треугольник, квадрат, круг и т.д. Само пространственное постижение этих форм достигается благодаря рисованию. К тому, чему дети научились рисуя, мы подходим теперь, в 6-м классе, уже с геометрическими понятиями». *Учебный план, 2-я лекция*

На первый взгляд мы имеем дело с противоречием между вышеприведенной цитатой из *Методико-дидактического курса* о присоединении геометрии к рисованию «около 9-го года» и только что процитированным местом из *Лекций по учебному плану*, где говорится об осуществляемом в 6-м классе переходе от того, чему дети выучились на рисовании, к геометрическим понятиям.

Чтобы достичь ясности, привлечем для сравнения другие места, прежде всего из *13-й лекции Базельского курса для учителей от 1920 года*:

«Тот, кто приобрел самостоятельный опыт в области геометрии, действительно может почувствовать, как из сферы покоящегося она стремится перейти в сферу живого».

Далее показано, как можно воспользоваться теоремой о сумме углов в треугольнике, чтобы «создать представление о подвижном в себе самом треугольнике», а после читаем следующее:

«Это могло бы послужить нам прекрасным подспорьем для развития у ребенка конкретного восприятия пространства. Также для того, чтобы вынести суждение по поводу пространственного отношения существ друг к другу, необходимо принять во внимание их внутреннюю природу. Чтобы научить детей верно и живо воспринимать такие отношения, мы **развиваем** у них **чувство пространства посредством подвижных игр**, предлагая им обегать геометрические фигуры. Чрезвычайно важен переход к фиксированию воспринятого таким образом. Для развития чувства пространства очень полезно рассматривать тени, отбрасываемые телами различной кривизны на различные кривые поверхности, а затем постараться понять, почему получается именно такая, а не иная тень. Можно даже утверждать: если ребенок научится понимать, почему при известных обстоятельствах шар отбрасывает эллиптическую тень (а это может уже понять ребенок 9 лет), то такое переживание поверхностей в пространстве окажет колоссальное влияние на внутреннюю подвижность чувства и представлений у ребенка. Поэтому развитие чувства пространства в школе необходимо». *Базель, 1920, 13-я лекция*

Здесь сравнительно сложные задачи на пространственное мышление адресуются весьма раннему возрасту, в котором, разумеется, не может быть и речи о последовательных доказательствах, исходящих из аксиом, по методу Эвклида, можно говорить лишь о понимании, опирающемся на чувство пространства.

Нечто иное находим мы в *12-й лекции Дорнахского рождественского курса 1921/22 года*. Здесь, после замечаний о стадиях возрастного периода от смены зубов до наступления половой зрелости и о необходимости вести преподавание в соответствии с этими стадиями, говорится следующее:

«Гораздо важнее учителю освоиться с такими вещами, нежели дать ему в руки готовый план с указанием целей. Тогда он наполнит определенные этапы развития соответствующим содержанием. С помощью искусства и художественного подхода, работая с детьми до 9-10 лет, он к тому **образному** формообразующему началу, в котором принимает участие человек, прибавит — не пренебрегая образным — **описательное**».

Далее говорится о других предметах, которые изучаются в этом возрасте, после чего вновь — о разделении преподавания на образное и описательное:

«Когда ребенок достигает 12-летнего возраста, к образам и описаниям добавляется **объяснение, рассмотрение причин и следствий**, то есть то, что требует умственного напряжения. Ребенок созревает для него между 11-м и 12-м годами. Однако занятия **математикой** в ее различных областях велись с **самого начала**. Математика, введение ребенка в арифметику и геометрию сопряжены с совершенно особыми трудностями преподавания и воспитания. Ведь на самом деле математические реалии, которые, в их простейшей форме, даются ребенку **до 9-го года** (при правильном подходе в этой области ребенок в состоянии постичь очень многое), впоследствии, на протяжении всех школьных лет, все усложняются; **поначалу они формируются чисто художественно, с помощью различных приемов арифметика и геометрия преподаются в образной форме**, а между 9-м и 10-м годами совершается переход к описаниям. **Ребенок должен научиться описательно рассматривать угол, треугольник, четырехугольник и пр. К доказательствам следует переходить только в возрасте около 12 лет**». *Дорнах, 1921/22, 12-я лекция*

В курсе *Илкли, 1923, в 10-й лекции*, можно прочитать:

«Особое положение в обучении и воспитании занимают счет, арифметика и геометрия, то есть математика».

Затем, после замечаний относительно сверхчувственных членов человеческого существа и особого влияния, которое оказывает преподавание на различные члены существа ребенка, читаем:

«То, что я вчера говорил о ботанике, о письме и чтении, —

полностью обращено к физическому и эфирному телам. Мы еще будем говорить о преподавании истории, как уже говорили о преподавании учения о животных и учения о человеке. Оно обращено к тому, что выступает из физического и эфирного тел во время сна. **Арифметика и геометрия относятся и к тому и к другому**. Такова их особенность. Поэтому для преподавания и воспитания арифметика и геометрия, так сказать, подобны хамелеону: по своей природе они соответствуют целостному человеку. И если в случае учения о животных и ботаники следует обращать внимание на то, чтобы они преподавались в определенной форме и в совершенно определенном возрасте, то арифметикой и геометрией занимаются в течение всего детства, внося соответствующие изменения в зависимости от изменения присущих возрасту особенностей».

После объяснений относительно того, что происходит во сне с воспринятым во время обучения, говорится:

«Когда мы спим, мы не находимся в нашем физическом и эфирном тела, однако они продолжают дальше считать, продолжают сверхчувственно чертить геометрические фигуры, доводят их до совершенства. Если это нам известно и мы на этом строим преподавание, то в результате мы достигаем колossalной живости всего существа человека. Поэтому нельзя в геометрии начинать с тех абстракций, с тех интеллектуальных построений, с которых начинают обычно. Необходимо начинать не с внешнего рассмотрения, а с внутреннего созерцания — например, пробудить в ребенке внутреннее чувство симметрии. Это можно начинать уже с самыми маленькими детьми».

Далее даны указания по поводу соответствующих заданий по рисованию. Они напоминают то, что было сказано на *4-м семинаре*. Затем говорится о том, как работа над такими заданиями продолжается во сне. После чего мы читаем:

«Такое бессознательное движение эфирного, то есть формообразующего, достигается, если геометрию начинать не с треугольников и пр., к чему всегда примешивается интеллектуальное, но создавая наглядно представление о пространстве». *Илкли, 1923, 10-я лекция*

В последнем педагогическом курсе Рудольфа Штейнера, *Курс Торки от 1924 года*, в 5-й лекции, можно найти замечания о преподавании геометрии, построенном на упражнениях по симметрии, в связи с чем говорится также о теореме Пифагора:

«Теорема Пифагора — это нечто такое, что действительно можно ставить себе как цель в преподавании геометрии. Возможно построить геометрию таким образом, чтобы ее венчала теорема Пифагора, гласящая, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. Если за это взяться по-настоящему, результаты будут колоссальные».

После демонстрации одного подходящего доказательства теоремы — того же самого, что мы находим *также и в семинаре*, говорится:

«С 11-12-летними детьми в геометрии можно продвинуться настолько далеко, что вы сможете объяснить им теорему Пифагора при помощи такого вот сравнения площадей. Дети испытывают необыкновенную радость, когда им удастся в этом убедиться, они станут усердными. Они захотят выполнять это снова и снова, особенно если вы дадите им задание кроить и склеивать. Только пара щалопаев-умников сразу все запомнят и смогут без труда все время проделывать то же самое всякий раз. Большинство же разумных детей будут кроить всякий раз заново и погружаться в сомнения — пока не сообразят, как оно должно быть на самом деле. Это соответствует тому, что чудесно заключено в теореме Пифагора, тому чудесному, с которым не следует расставаться». *Торки, 1924, 5-я лекция*

Попробуем упорядочить эти многообразные указания:

1) Арифметикой и геометрией следует заниматься на протяжении всего детского возраста, внося соответствующие возрастным этапам изменения. *Илкли, 1923*

2) Характер преподавания математики (геометрии) определяется этапами развития ребенка, соответствующими 9-му и 11-му годам жизни: **художественно-образное, описывающее, объясняющее и доказывающее**. *Дорнах, 1921/22*

3) На доказательствах геометрию можно строить лишь после 11-12-го года жизни. *Учебный план и Дорнах, 1921/22*

4) Однако до этого должны проводиться **обстоятельные занятия** геометрическими построениями. Занятия этими планиметрическими и стереометрическими построениями осуществляются в два этапа: **художественно-образный** — до 9-го года и **описательный** — до 11-го или 12-го года. *Дорнах, 1921/22*. На первом этапе (помимо упражнений, служащих для подготовки к письму) выполняются художественные упражнения по симметрии, на втором происходит переход к обычным геометрическим построениям, а с ними — к циркулю и линейке. При этом важно помнить указание Рудольфа Штейнера, что в 6-м классе детям следует заниматься **минералогией** — «с использованием геометрических форм».

5) *Методико-дидактический курс* относит переход от художественно-образного этапа к описательному этапу уже к возрасту около 9 лет, в то время как *Лекции по учебному плану и Дорнахский курс 1921/22 года* допускают начинать описательную геометрию только после 9-ти лет.

Из совокупности этих указаний можно установить следующее распределение целей в преподавании элементарной геометрии:

Цели преподавания геометрии

1-й класс:

рисование с целью обучения письму

2-й и 3-й классы:

рисование простых и более сложных форм, вне связи с предметами, с целью воспитания пространственного сознания, способного к «формообразованию» (симметрия и т.п.).

4-й и 5-й классы:

знакомство с геометрическими фигурами через рисунок, описание их свойств (треугольник, квадрат, круг, эллипс и т.д.) до теоре-

мы Пифагора, по крайней мере для случая равнобедренного прямоугольного треугольника.

С 6-го по 8-й класс:

все, что до сих пор проходилось в изобразительной и описательной форме, должно теперь преподаваться геометрически доказательно. (В то же время на занятиях черчением изучаются основы учения о проекциях и тенях.)

Помимо рисования с целью обучения письму проводится три цикла обучения, каждый из которых представляет собой замкнутое целое:

1-й цикл: до 9-летнего возраста дети в процессе рисования, живописи, лепки занимаются свободным художественным построением форм, не связанных с предметными мотивами.

2-й цикл: не позже 9 лет начинается первый собственно геометрический цикл, охватывающий обычные геометрические реалии и раскрывающий их свойства, что, однако, не должно выходить за рамки чисто внутреннего созерцания. Цель цикла — теорема Пифагора.

3-й цикл: только в этом цикле, который начинается на 11-м или 12-м году, осуществляется переход к строгому построению математического знания, и все, с чем дети до сих пор знакомились посредством простого рассмотрения, должно быть проработано по элементам.

С точки зрения Рудольфа Штейнера, «созерцательное рассмотрение» — это также подлинная геометрия. «Созерцательное» доказательство теоремы Пифагора он рекомендует проводить уже в возрасте между 9-м и 11-12-м годами. Очевидно, об этом методе преподавания геометрии идет речь в *Методико-дидактическом курсе*, согласно которому геометрия как таковая должна начинаться после 9 лет. Однако в *Лекциях по учебному плану*, когда речь заходит о доказательной геометрии, говорится, что то, чему дети

научились рисуя, в 6-м классе закрепляется в геометрических понятиях. Таким образом, разрешается противоречие, которое на первый взгляд существует между *Методико-дидактическим курсом* и *Лекциями по учебному плану*, и открывается путь для дальнейшего рассмотрения учебных целей.

Еще о четвертом классе:

После того как в первых трех классах дети занимались рисованием как подготовкой к письму, а затем — рисованием и лепкой, работая над свободными от предметных мотивов формами, самое позднее в 4-м классе они переходят к черчению простейших геометрических форм и учатся описывать их свойства просто рассматривая их.

Пятый класс:

В *Лекциях по учебному плану* говорится:

«Далее, в 5-м классе мы собираемся продолжать заниматься дробями и десятичными дробями, вообще — научить детей всему, что позволит им свободно обращаться с целыми числами, обычными и десятичными дробями». *Учебный план, 2-я лекция*

Добавим, что в геометрии продолжается и поднимается на более высокий уровень рассмотрение и описание геометрических построений.

Шестой класс:

Во 2-й из *Лекций по учебному плану* читаем:

«В 6-м классе мы переходим к исчислению процентов, к арифметике, связанной с учетом ценных бумаг, и простейшему погашению вексельного счета, начиная, таким образом, алгебру».

На 13-м семинарском занятии также обсуждалось, как от исчисления процентов может быть осуществлен переход к алгебре.

Геометрия начинает строиться на доказательствах и доводится

приблизительно до признаков равенства треугольников. При этом используются понятия, полученные при рисовании геометрических форм еще в предыдущие годы, они должны быть дополнитель но разъяснены и расширены; в особенности же должно быть введено понятие геометрического места.

В отношении элементов бухгалтерского учета, который должен начинаться в 6-м классе, в 14-й лекции Методико-дидактического курса мы читаем следующее:

Еще о шестом классе:

«То, что может быть названо способностью суждения и на что мы можем опираться как на рассудочное, интеллектуальное понимание, становится актуальным в последних классах неполной средней школы. Поэтому именно в 12-летнем возрасте, когда начинается активное развитие способности рассудочного понимания, мы привносим нечто такое, для чего необходим определенный инстинкт, который, однако, в это время уже управляет способностью суждения. Такие сумеречные инстинкты души мы должны преодолеть с помощью способности суждения. В этом возрасте следует уделить внимание тому, что в человеке имеется инстинкт к получению дивидентов, к барышничеству, к тому, чтобы выгадать на учетном проценте, и пр. Но голос рассудка должен звучать громче. Поэтому именно на этот возраст мы должны отнести знакомство с коммерческими расчетами, с соотношением между товарооборотом и достатком и т.д.». *Метод.-дидакт., 14-я лекция*

Седьмой класс:

Из Лекций по учебному плану:

«В 7-м классе мы должны перейти к возведению в степень и извлечению корней, а также к операциям с отрицательными числами. Но прежде всего следует познакомить учащихся с уравнениями и их применением в практических областях жизни».

В данной связи обратимся также к 14-му семинарскому занятию.

Геометрия продолжает строиться на основе доказательств. В

качестве объектов рассмотрения можно взять круг, четырехугольник и многоугольник. Продолжается работа над понятием **геометрического места**, с его помощью геометрические фигуры теряют жесткость, делаются подвижными.

Восьмой класс:

В Лекциях по учебному плану говорится:

«В 8-м классе продолжается знакомство с учеником об уравнениях, которое дается в той мере, в какой его способны усвоить дети. Добавляется вычисление площадей фигур и поверхностей, продолжается работа над понятием геометрического места». *Учебный план, 2-я лекция*

Что касается геометрического места, см. также *14-е семинарское занятие* и материалы конференции от 22.9.20.

Помимо упоминающегося в *Лекциях по учебному плану* вычисления площадей поверхностей следует также заниматься **вычислением** элементарных **объемов**, а понятие геометрического места должно быть применено к **эллипсу, гиперболе и кривым Кассини**. См. также *13-е семинарское занятие*. Следует продолжать практиковаться в возведении в степень, в извлечении корней и решении уравнений со **многими неизвестными**.

Что до результатов преподавания математики, то вплоть до настоящего времени имеет значение то, что многие классные учителя не настолько в ней сильны, чтобы на деле выполнить поставленные Рудольфом Штейнером требования. В особенности это относится к геометрии — уже самые ходовые ее реалии многим из учителей чужды; они не испытывали любви к этому предмету в свои школьные годы. К тому же на место таких общепринятых реалий ставится что-то совершенно иное, причем иное в «квадрате». Во-первых, рисование фигур, которые должны подвергаться преобразованиям, причем преобразования совершаются чисто внутренним образом и никак не связаны с формами предметов и наблюдаемыми процессами. Следующий этап — переход к «абстрактным» геометрическим фигурам, свойства и закономерности преобразований которых должны устанавливаться посредством

чистого созерцания, и работать при этом приходится механическими инструментами, линейкой и циркулем. В завершение должна быть преподана «настоящая», построенная на доказательствах геометрия! Тут перед нами стоит чрезвычайно важная задача: вполне конкретно разработать совершенно новое введение в геометрию. 14 февраля 1923 года Штейнер говорил о том, что необходим учебник геометрии.

Начиная с 9-го класса, характер преподавания геометрии кардинально меняется. Теперь оно переходит в руки математика, который всякий раз обнаруживает, что элементарные геометрические представления, на которые он должен опираться, совершенно чужды учащимся, пришедшим от классного учителя.

На открытии 9-го класса 22 сентября 1920 года Штейнер спросил учителя математики о том, каким образом он занимался возведением в степень и извлечением корня в бывшем 8-м классе, в особенности же он интересовался вычислением квадратных и кубических степеней и корней. Затем он сказал:

Девятый класс:

«Нам следует заниматься этими вещами в основном не потому, что они нам понадобятся впоследствии. Главное — нам необходимо практиковаться в определенных формах мышления. Человек упражняется в особых формах мышления при возведении в куб и квадрат, при извлечении корня. При этом он абстрагируется от конкретности, он берет числа и соединяет, группирует их по новому, таким образом глубоко проникая в числовые соотношения. Это настолько развивает в мыслительном отношении, что заниматься этим необходимо. Кроме того, необходимы практические вычисления. Например, мне кажется правильным, если вы будете производить с учащимися... такие вычисления, как **практическое определение объема**. Я спросил бы у детей: поместится ли данное количество воды в сосуде, образованном цилиндром и конусом? Каково количество воды, которую можно влить в сосуд, диаметр dna которого равен половине диаметра dna другого сосуда? Затем я бы присоединил сюда приближенные вычисления — чтобы дети получили понятие также и об этой области. Для начала я бы научил детей работать нивелиром и находить **среднюю величину** для какой-нибудь практической цели, например при взвешивании

на аптечных весах. Далее нужно продолжать то, что связано с вычислениями в области **банковского дела**. А в геометрии — начинать с вычисления объемов тел, а потом я бы посоветовал перейти к первым элементам начертательной геометрии». 22.9.20

При утверждении учебного плана для 10-го класса год спустя обсуждались также некоторые подробности, имеющие значение для 9-го класса. Тот же учитель рассказал, как он давал в 9-м классе учебный материал, после чего Рудольф Штейнер заметил:

Еще о девятом классе:

«Можно ввести понятие числа π . Если вводится π , то это не означает, что учащимся тут же должна быть преподана вся теория. Они могут знать число π с точностью до одного знака после запятой». 17.6.21

Когда в ответ на вопрос, с какими кривыми знакомы дети, учитель назвал эллипс, гиперболу и параболу, которые рассматривались в 8-м классе в связи с понятием геометрического места, Штейнер пояснил:

«Дети должны познакомиться с первыми элементами **тригонометрии**. Мне думается, это можно включить в программу. Далее — **начертательная геометрия**»

После учитель сообщил, что учащиеся настолько ориентируются в изображении пересекающихся плоскостей и поверхностей, что могут сделать чертеж двух пересекающихся в пространстве треугольников и найти точку пересечения прямой и плоскости. Тогда Штейнер сказал:

«Возможно, в этом нет необходимости. Следовало бы... исходить из проекций, ортогональных проекций: точка, прямая, представление плоскости — плоскости как таковой, а не плоскости в виде треугольника».

Учебная задача 9-го класса в области начертательной геометрии описана здесь полнее, чем годом раньше, в 1920 году; она оказалась легче того, что наметил сам учитель.

Непосредственно вслед за этим Штейнер сказал то, что относится, очевидно, уже к 10-му классу.

Десятый класс:

«Сюда должно быть присоединено» — то есть к рассмотрению плоскости как таковой — «учение о плоскостях и сечениях двух плоскостей. А за этим должны следовать первые элементы проективной геометрии. Прежде всего детям должно быть дано понятие о принципе двойственности. Речь идет о самом элементарном».

На замечание того же учителя о том, что для тригонометрии необходимы логарифмы, Штейнер ответил (это было как раз перед открытием 10-го класса), очевидно возвращаясь к 9-му классу:

Еще о девятом классе:

«А что, они еще не знакомы с понятием логарифма? Разумеется, оно должно быть рассмотрено. Это неотъемлемая часть. Вам понадобятся только основные понятия: синус, косинус, тангенс. Пара теорем, которые могут быть разобраны сами по себе, чтобы они начали понимать $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, причем это следует сделать как можно более наглядным».

Учитель математики заключил, что Рудольф Штейнер хотел бы, чтобы логарифмы проходились уже в 9-м классе, и спросил его об этом. Штейнер уточнил:

«Достаточно продвинуться настолько, чтобы учащиеся могли выполнять элементарные логарифмические вычисления». 17.6.21

В том же учебном году, в начале которого были даны эти указания, 11 сентября 1921 года, Рудольф Штейнер сказал:

Еще о десятом классе:

«Если из проективной геометрии вы возьмете самые элементарные понятия вплоть до закона двойственности, изумите детей и сможете пробудить у них интерес к построению некоторых фигур, то можно будет считать, что вы достигли всего, чего вам следовало достичь». 11.9.21

При открытии 11-го класса в 1922 году была поставлена следующая цель в области математики:

Одиннадцатый класс (1922):

«Возможно более глубоко рассмотреть **тригонометрию и аналитическую геометрию**. В начертательной геометрии следует продвинуться настолько, чтобы дети поняли и могли начертить пересечение конуса с цилиндром». 21.6.22

Свообразную метаморфозу претерпело это указание год спустя, когда 31 июля 1923 года Штейнер так ответил на вопрос учителя математики относительно учебного плана по алгебре:

Еще об одиннадцатом классе (1923):

«Ранее я предложил взять материал в таком объеме, чтобы было достигнуто понимание теоремы косинусов и ее приложений. Это и есть средоточие учебного плана. Здесь много алгебры, теория рядов, функции и пр. Данный учебный план можно сохранить и давать учащимся задания, при выполнении которых они должны будут всесторонне овладеть теоремой косинусов». 31.7.23

Третья формулировка учебного плана для 11-го класса дана 30 апреля 1924 года:

Еще об одиннадцатом классе (1924):

«11-й класс: сечения и пересечения поверхностей, построение теней, Диофантовы уравнения, аналитическая геометрия вплоть до конических сечений. В тригонометрии 11-й класс должен внутренне понять функции, прежде всего в связи с синусом и косинусом. Исходить при этом следует, конечно же, из геометрии». 30.4.24

Последняя фраза выглядит несколько выпадающей из контекста. Сказана она была потому, что непосредственно перед этим Штейнер, обсуждая учебные задачи 12-го класса, отклонил переход к дифференциальному исчислению посредством геометрических рассуждений. Поэтому, говоря о тригонометрии, он подчеркнул, что исходить следует именно из геометрических рассуждений.

Рудольф Штейнер оставил также два плана по преподаванию математики в 12-м классе: от 1923 года — для того 12-го класса, который сразу же держал экзамены, и от 1924 года — для последующих 12-х классов, которые учились еще год в подготовительном 13-м классе. Ни в какой другой дисциплине разница между этими двумя учебными планами не была столь большой, как в математике. Для нас важно не то, какие цели Штейнер поставил в 1923 году, исходя из государственных учебных планов, но то, в какой мере здесь проявляется идеальная цель, стоящая перед чисто вальдорфским 12-м классом.

Двенадцатый класс (1923):

«Желательно, чтобы именно в этом возрасте (приблизительно 18 лет) учащиеся достигли достаточно высокого уровня понимания художественно-исторического подхода и познакомились со спиритуальным подходом (без сообщения им «антропософской догматики») в литературе, истории искусства и истории». 25.4.23

При формулировании учебного плана в 1923 году примерные цели для различных дисциплин были определены с такой спиритуальной конкретностью, которой уже не было во время второго обсуждения учебного плана 12-го класса в 1924 году. В связи с математикой было сказано следующее:

Еще о двенадцатом классе (1923):

«Невозможно давать **учение о пространстве** в том виде, как я изложил его в новом курсе для учителей в Дорнахе*, говорить о трех измерениях: верх-низ, лево-право, впереди-сзади. Отсюда такие затруднения в распространении антропософских истин вообще. Видите ли, на такие вещи теперь вообще публики не отыскать, а по большому счету она должна была бы отыскаться. И вот что следовало бы рассмотреть: все имеющее отношение к воле действует внутри земной сферы трехмерным образом. Все эмоционально-чувственное действует не трехмерно, а двухмерно. Такой процесс хотя и можно было бы представить изображенным на расположенной вдоль оси симметрии человека плоскости, но ограничиваться этим не следует. Данная плоскость повсюду двух-

*Дорнах 1923, 1-я лекция. — Прим. сост.

мерна. Мышление же приводит к одномерности, а я — к нульмерности. Таким образом достигается значительная ясность. Вот я вас и спрашиваю: как можно об этом читать лекции, хотя все это — вещи элементарные? На это просто нет слушателей». 25.4.23.

Теперь приведем выдержку из учебного плана для 12-го класса от 30 апреля 1924 года. В этом классе преподавание, начиная с 7-го года обучения, осуществлялось согласно учебному плану вальдорфской школы и поэтому учащиеся познакомились здесь с комплексными числами вплоть до теоремы Муавра, а затем — с диафантовыми уравнениями и комбинаторикой.

Двенадцатый класс (1924):

«Опыт прошлогоднего преподавания в 12-м классе показал, что на самом деле так делать нельзя. Такие вещи — нечто чудовищное для человеческой души*».

«В возможно более ясной форме пройти сферическую геометрию и начала аналитической геометрии. В начертательной геометрии — перспектива Кавалье. Учащиеся должны быть в состоянии начертить сложный план дома, вместе с интерьером, в перспективе Кавалье. В алгебре нужно пройти самые азы дифференциального и интегрального исчислений. Нет необходимости доводить детей до нахождения максимумов и минимумов. Это относится уже к высшей школе. Вполне необходимо усвоить лишь сами понятия дифференциала и интеграла».

Эти указания Штейнер разъяснил так:

«Сферическую тригонометрию и ее приложения к астрономии и высшей геодезии следует рассматривать соответствующим возрасту образом и брать в общем и целом. Аналитическая геометрия используется для того, чтобы... наглядно показать, как формы выражаются в уравнениях. В итоге учащиеся должны быть в состоянии понять, как выглядит та или иная кривая или поверхность, например:

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a$$

Это дает нам астероиду... Очень важно достичь ясности в связи с уравнениями, чтобы учащимся было понятно все, что в них

*Имеются в виду экзамены на аттестат зрелости после 12-го класса. — Прим. сост.

заключено. Они должны уметь, взяв начертченную на плоскости или в трехмерном пространстве кривую либо объемное тело, подобрать соответствующее уравнение; хотя, разумеется, не требуется, чтобы уравнение сошлось до запятой: необходимо, чтобы учащиеся приобрели представление о самом смысле уравнений.

Я не считаю полезным для общего математического образования, когда дифференциальное и интегральное исчисление выводят из геометрии. Действовать нужно алгебраически. Я исходил бы из дифференциального исчисления, то есть из $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, беря это как отношение, и через постоянное уменьшение делимого и делителя, через число пришел бы к тому, чтобы вывести производные. Я не стал бы исходить из отношения непрерывностей, поскольку через него не может быть получено понятие о производных. Я бы исходил не из дифференциала, но из отношения дифференциалов. Если же вы отталкиваетесь от последовательностей, то прийти к геометрии можно только от задачи о касательной (как секущая переходит в касательную). Можно всю производную рассматривать чисто числовым, арифметическим образом и отсюда осуществить переход к геометрии, чтобы учащиеся получили представление о том, что геометрический подход можно использовать для иллюстрации числовых отношений. Затем, посредством обращения, вы получаете интеграл. Тогда у вас появляется возможность исходить не из той посылки, что исчисление — это своего рода фиксация геометрии, но, наоборот, из того, что геометрия — это иллюстрация к исчислению. Аналогично следовало бы поступать и в других случаях, например рассматривать положительные и отрицательные числа не как что-то изолированное. Числовой ряд надо брать вот как: $5 - 1, 5 - 2, 5 - 3, 5 - 4, 5 - 5, 5 - 6$, — а теперь у меня недостача, потому что не хватает единицы, и поэтому я пишу -1 . Выделить недостачу, не прибегая к числовой оси. В этом случае мы остаемся в пределах чисел как таковых. Отрицательное число — это недостающее множество, недостаток в уменьшаемом. Гораздо больше внутренней активности! Таким образом создается возможность развить у учащегося намного более реальные способности, нежели в том случае, когда все выводится только из геометрии».

На вопрос учителя математики о том, с чего следует начинать, Штейнер ответил:

«Поскольку класс дошел уже до сферической тригонометрии, следует переходить к развитию понятия сферы, — качественно, не

бросаясь сразу в расчеты. Вместо чертежей на плоскости, делать чертежи на шаре, чтобы учащиеся получили понятие о сферическом треугольнике. Это должно быть наглядно. Затем обратить внимание детей на то, что сумма углов не равна 180° , что она больше. Это понятие нужно до них как следует донести — лежащий на сфере треугольник с криволинейными сторонами. Потом уже приниматься за расчеты. В тригонометрии исчисление является интерпретацией сферы. Было бы желательно, чтобы вы рассматривали сферу исходя не из центра шара, но от кривизны поверхности, чтобы вы могли в процессе обсуждения перейти к наиболее общим понятиям: например, к кривизне и к тому, как фигура, являющаяся на шаре сферическим треугольником, будет выглядеть на эллипсоиде, и как он будет выглядеть на параболоиде вращения — таком, который не замкнут с обоих концов, но открыт. Отталкивайтесь не от центра, но от кривизны поверхности — иначе вам не управиться с другими телами. Вы сами должны мыслить поверхностями, должны вырабатывать в себе представление: что буду я испытывать, «обходя» стороны сферического треугольника? что буду испытывать, «обходя» треугольник, соответствующий сферическому треугольнику на эллипсоиде? Можно было бы рассмотреть с учащимися, как это выглядит, если обычную теорему Пифагора применить к сферическому треугольнику. Квадраты, разумеется, здесь брать нельзя. Так мы способствуем общему развитию, иначе же развивается только рассудок. Перестановки, сочетания — все это уже пройдено». — Этот учитель уже в 11-м классе давал комбинаторику. — «Если будет время, пройти основы теории вероятностей, например вероятность продолжительности жизни человека». 30.4.24.

В отношении перспективы Кавалье имеется еще такое замечание от 2 июня 1924 года:

«Перспектива Кавалье — реалистическая. В ней мы видим все маленькими кусочками. В перспективе Кавалье следует использовать все возможности. Архитектоника — это то, что предназначено для перспективы Кавалье. Архитравы первого «Гетеанума» были выполнены в перспективе Кавалье, это было похоже на то, как бывает, когда стены комнаты осматривают обходя их по кругу.

Я бы еще высказал пожелание, чтобы учащиеся рисовали все конструкции, например конические сечения, также и от руки. А собственно точное черчение следует выполнять с циркулем и линейкой».